

- 周江存, 潘尔年. 2021. 负荷勒夫数渐近值解析表达式. 地球物理学报, 64(10):3521-3531, doi:10.6038/cjg2021P0642.  
Zhou J C, Pan E N. 2021. Asymptotic load Love numbers in exact closed-form. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 64(10): 3521-3531, doi:10.6038/cjg2021P0642.

# 负荷勒夫数渐近值解析表达式

周江存<sup>1</sup>, 潘尔年<sup>2</sup>

1 中国科学院精密测量科学与技术创新研究院, 大地测量与地球动力学国家重点实验室, 武汉 430077

2 College of Engineering, Cleveland State University, Cleveland, OH 44115, USA

**摘要** 地表质量负荷引起的地球变形问题是大地测量学和地球物理学中的一个重要的研究内容. 负荷勒夫数的计算和收敛的负荷格林函数的构建是模拟地球负荷形变的基础, 其中当球谐阶数趋于无穷大时负荷勒夫数的渐近值, 在格林函数计算中发挥重要的作用. 本文首先介绍了地表质量负荷的边值问题, 然后简要回顾了目前已有的计算负荷勒夫数渐近值三种方法的推导过程, 最后给出推导渐近值解析表达式的一种新方法. 新方法运用求解地球变形边值问题的解析解方法, 以及一种高效传播矩阵方法, 建立地表边界条件与高阶负荷勒夫数之间的直接联系, 解出了负荷勒夫数渐近值解析表达式. 本文的解析表达式更准确地描述了负荷勒夫数的渐近特征. 新方法仅涉及常系数常微分方程组的基解矩阵及基础的矩阵运算, 原理简单易懂.

**关键词** 地表质量负荷; 负荷勒夫数; 渐近值; 解析解; 传播矩阵方法

doi:10.6038/cjg2021P0642

中图分类号 P228

收稿日期 2021-08-28, 2021-09-10 收修定稿

## Asymptotic load Love numbers in exact closed-form

ZHOU JiangCun<sup>1</sup>, PAN ErNian<sup>2</sup>

1 State Key Laboratory of Geodesy and Earth's Dynamics, Innovation Academy for Precision Measurement Science and Technology, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430077, China

2 College of Engineering, Cleveland State University, Cleveland, OH 44115, USA

**Abstract** The Earth's deformation due to surface mass loading is an important issue in geodesy and geophysics. Computing load Love numbers and constructing the convergent load Green's functions are the fundamentals in simulating the Earth's deformation due to surface mass loading, in which the analytical asymptotic load Love numbers for the harmonic degree at infinity play an important role. In this paper, the boundary value problem for the surface mass loading is introduced first. The three methods proposed before by other scholars to derive the asymptotic values are then briefly reviewed. Finally a new novel approach is proposed. The new way applies the analytical method, which is used to solve the boundary value problem for Earth's deformation, and an efficient and powerful propagator matrix method to link the boundary conditions on the Earth's surface and the high-degree load Love numbers. In this way, new exact closed-form asymptotic expressions of the load Love numbers are obtained. The analytical asymptotic expressions of the load Love numbers are able to more accurately describe the asymptotic characteristics of the load Love numbers. The new approach is simple in theory and is easy to understand, which only involves the solution base of the ordinary differential equations with constant coefficients and some primary matrix algebras.

**Keywords** Surface mass loading; Load Love numbers; Asymptotic value; Analytical solution; Propagator matrix method

## 0 引言

全球水循环是地球表层质量迁移的重要形式,它引起全球水质量在时间和空间的重新分布,会进一步导致地球的变形。该变形主要有三种形式:(1)大气负荷,主要是大气质量的变化对地球的引力作用与压强变化对地表的负载作用(Merriam, 1992; Van Dam et al., 1994; Sun and Luo, 1998; Guo et al., 2004);(2)潮汐和非潮汐海洋负荷,主要是海水质量的时空变化对地球的引力作用和对地表的负载作用(Longman, 1962, 1963; Farrell, 1972; Goad, 1980; 许厚泽等, 1982);(3)陆地水负荷,主要是陆地水的质量变化对地球的引力作用和对地表的负载作用(Zhou et al., 2009)。这三种效应可以引起地表几厘米(cm)的位移和数十微伽( $10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ )的重力变化。在目前高精度的大地测量学研究中,这三种效应都是必须要加以考虑的。对这些效应的模拟,目前已有比较成熟的理论,通常采用负荷质量与负荷格林函数的褶积积分计算获得,其中格林函数是负荷勒夫数或其组合与 Legendre 函数(或称为球函数)或其导数的乘积的无穷级数求和(Longman, 1963; Farrell, 1972; Guo et al., 2004)。鉴于球函数有解析的递推公式,因此计算格林函数的基础就是计算出负荷勒夫数。

由于格林函数是一个无穷级数的求和,对于一个无穷级数求和的问题来说,高阶勒夫数的高效计算以及格林函数的收敛性如何是数值计算的关键。为了计算高阶的负荷勒夫数,Longman(1963)提出了对变量进行无量纲化的处理;汪汉胜等(1996)通过观察各变量的变化特征提出了 $r$  幂因子法;特别地, Pan 等(2015)基于合理的假设提出了计算负荷勒夫数的解析解方法;Chen 等(2018)基于解析解方法提出了一种称为刚度矩阵的传播矩阵方法来计算

超高阶负荷勒夫数,克服传统传播矩阵方法的溢出问题;Zhou 等(2019a)运用 DVP(dual variable and position)传播矩阵法获得了任意球谐阶数的勒夫数,并提供了相应的 MATLAB 程序计算不同类型的勒夫数(包括潮汐、负荷、剪切和位错)。实际上,这些表征地球在不同力源(如引潮力、地表正应力或剪切应力、以及内部断层的等效体力等)作用下产生变形的勒夫数之间并不完全独立,它们之间的关系可参考潘尔年和丁中一(1986)和 Okubo(1993)。

为了保证格林函数的收敛, Farrell(1972)给出了负荷勒夫数的渐近值,即当球谐阶数  $n$  趋于无穷大时勒夫数的值,然后通过 Kummer 变换可有效降低截断阶数(约 10000 阶)并加速格林函数的收敛,从而为能够准确地模拟负荷引起的地球形变奠定了基础。可见,负荷勒夫数渐近值对负荷格林函数来说是至关重要的。除了 Farrell(1972)之外, Okubo 和 Endo(1985)、Guo 等(2004)也对如何计算负荷勒夫数渐近值给出了不一样的理论计算方法,我们最近提出了计算位错勒夫数的渐近值的方法,在忽略自引力的情形下,渐近值可根据传播矩阵的特性很容易地求出(Zhou et al., 2021a)。位错问题和负荷问题的差别在于边界条件的不同,因此该方法可直接应用于求取负荷勒夫数的渐近值。

本文首先对目前已有的上述三种计算渐近值的方法进行简单的回顾,然后着重介绍一种新的能够获取负荷勒夫数渐近值解析表达式的方法。最后将我们的方法与已有的计算方法进行了比较,并给出了定量的数值结果展示新的解析表达式在表达负荷勒夫数渐近特征方面的优势。

## 1 已有方法介绍

对于地球受力变形,我们采用如下的描述地球变形的微分方程组边值问题。其中,微分方程组为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU_L}{dr} = -\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{U_L}{r} + n(n+1) \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{U_M}{r} + \frac{1}{\lambda+2\mu} T_L, \\ \frac{dU_M}{dr} = -\frac{U_L}{r} + \frac{U_M}{r} + \frac{1}{\mu} T_M, \\ \frac{d\Phi}{dr} = -4\pi G\rho U_L - (n+1) \frac{\Phi}{r} + Q, \\ \frac{dT_L}{dr} = \left[ \frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} - 4\rho gr \right] \frac{U_L}{r^2} + n(n+1) \left[ \rho gr - \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \right] \frac{U_M}{r^2} \\ \quad - (n+1)\rho \frac{\Phi}{r} - \frac{4\mu}{\lambda+2\mu} \frac{T_L}{r} + n(n+1) \frac{T_M}{r} + \rho Q, \\ \frac{dT_M}{dr} = \left[ \rho gr - \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \right] \frac{U_L}{r^2} + 2\mu \left[ \frac{2n(n+1)(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} - 1 \right] \frac{U_M}{r^2} + \frac{\rho}{r} \Phi - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{T_L}{r} - 3 \frac{T_M}{r}, \\ \frac{dQ}{dr} = -4\pi G(n+1)\rho \frac{U_L}{r} + 4\pi Gn(n+1)\rho \frac{U_M}{r} + (n-1) \frac{Q}{r}, \end{array} \right. \quad (1)$$

其中  $\lambda, \mu$  是拉梅常数,  $\rho$  是密度,  $g$  是重力加速度(习惯上称之为重力), 它们都是球坐标系的径向分量  $r$  的函数,  $G$  是万有引力常数,  $U_L, U_M, \Phi, T_L, T_M$  分别是垂向位移、水平位移、附加引力位、垂向正应力、垂向剪应力的球谐展开的第  $n$  阶的系数(Pan et al., 2015),  $Q$  满足

$$Q = \frac{d\Phi}{dr} + \frac{(n+1)\Phi}{r} + 4\pi G \rho U_L, \quad (2)$$

因此, 这 6 个变量要分别对不同的球谐阶数  $n$  求解. 该方程是研究地球在不同力源作用下发生静态变形的基础微分方程组, 对于不同的力源需采用相应的边界条件 (Love, 1911; Farrell, 1972; Okubo and Endo, 1985; Sun and Okubo, 1993).

对于地表质量负荷问题, 通常将负荷看成点源, 并且将该点源放置于北极点. 由于对称性, 在负荷作用下的变形与经度无关, 即球谐展开的次数  $m=0$ , 此时球函数退化为 Legendre 多项式.

下面介绍边界条件. 为方便起见, 我们定义两个矢量

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_L \\ U_M \\ \Phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_L \\ T_M \\ Q \end{bmatrix}. \quad (3)$$

在地心处正则, 即

$$\mathbf{U}(r=0) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

在内部边界连续, 以及在地表

$$\mathbf{T}(r=a) = \begin{bmatrix} -\frac{(2n+1)g_a}{4\pi Ga} \\ 0 \\ -\frac{2n+1}{a} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中,  $g_a$  是地表重力,  $a$  是地球半径. 在推导该式中的边界值时, 认为负荷点源的质量  $M$  满足单位引力

位假定(即  $GM/a = 1$ , 可参考 Sun and Sjöberg, 1999), 也就是说负荷质量  $M=a/G=m_e/ag_a$ , 其中  $m_e$  为地球质量. 也有一些研究采用地球质量假定, 即  $M=m_e$ (如 Guo et al., 2004). 不管用哪种定义, 在计算格林函数时都要除以负荷质量以得到单位质量负荷的结果, 因此只要推导过程自洽都不影响最终的结果.

负荷勒夫数定义为

$$\begin{cases} h_n = g_a U_L(r=a), \\ l_n = g_a U_M(r=a), \\ k_n = -1 - \Phi(r=a), \end{cases} \quad (6)$$

其中, 带下标  $n$  的负荷勒夫数  $h_n, l_n, k_n$  表示对应于球谐展开的  $n$  阶的地表结果. 因为(1)式是关于各个物理量的球谐展开系数的, 所以不同的球谐阶数对应不同的勒夫数. 相应的负荷格林函数为

$$\begin{cases} u(a, \theta) = \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(\cos\theta), \\ v(a, \theta) = \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} l_n \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial \theta}, \\ \phi(a, \theta) = \frac{ag_a}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} k_n P_n(\cos\theta). \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $u, v$  和  $\phi$  分别为垂直位移、切向位移和附加引力位,  $P_n$  是 Legendre 多项式,  $\theta$  是计算点余纬. 可以看到格林函数是一个无穷级数求和, 需要截断处理. 但是对于负荷问题需要截断到很高的阶数, 这给计算带来很大的时间成本. 为此 Farrell(1972)根据 Boussinesq 问题的解(见下文)给出了负荷勒夫数的渐近值, 从而可有效降低截断的阶数, 并加速格林函数计算的收敛.

应用 Kummer 变换, (7)式改写为

$$\begin{cases} u(a, \theta) = \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^N (h_n - h_{\infty}) P_n(\cos\theta) + \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} h_{\infty} P_n(\cos\theta), \\ v(a, \theta) = \frac{a}{m_e} \sum_{n=1}^N (nl_n - l_{\infty}) \frac{1}{n} \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial \theta} + \frac{a}{m_e} \sum_{n=1}^{\infty} l_{\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial \theta}, \\ \phi(a, \theta) = \frac{ag_a}{m_e} \sum_{n=1}^N (nk_n - k_{\infty}) \frac{1}{n} P_n(\cos\theta) + \frac{ag_a}{m_e} \sum_{n=1}^{\infty} k_{\infty} \frac{1}{n} P_n(\cos\theta), \end{cases} \quad (8)$$

其中, 带下标  $\infty$  的负荷勒夫数  $h_{\infty}, l_{\infty}, k_{\infty}$  表示相应的渐近值. 由于负荷勒夫数渐近值具有严格解析表达式, 右端的第二项通常具有用三角函数表示的严格解析形式(Farrell, 1972; Zhou et al., 2019b), 而第一项求和的收敛要比(7)式中的求和快得多, 因此截

断阶数  $N$  可以取得足够小(对于位移与附加引力位,  $N=3000$ ; 对于倾斜或应变  $N=10000$  足以保证计算的收敛). 可见负荷勒夫数渐近值在计算负荷格林函数时发挥着至关重要的作用.

对于当  $n$  很大时的情形, 我们可以忽略液核的

影响,因为液核的存在只影响较低阶的负荷勒夫数,所以可以采用纯固体的地球模型.实际上,正如下文将要讨论的那样,只有地球最外层的参数才会影响负荷勒夫数的渐近值,这也是为什么可以直接用均匀球(采用地球最外层结构参数和地表重力值,如 Okubo, 1988)或仅仅采用最外层参数(如郭俊义, 2000; Guo et al., 2004)来解算负荷勒夫数的渐近值.

下面分别介绍目前已有的三种求解负荷勒夫数渐近值的方法.

### 1.1 Farrell 方法

在球坐标系下,当角距离( $\theta$ )非常小的时候,问题就等效于平面的 Boussinesq 问题,因为此时地球的曲率效应可忽略(Farrell, 1972).对于 Boussinesq 问题,采用柱坐标及柱函数(Bessel 函数)系(用  $z$ ,  $r$ ,  $\varphi$  表示,将负荷点源放置于坐标原点,由于对称性,变形与  $\varphi$  无关.注意此时的  $r$  表示距离  $z$  轴的距离),所有变量都利用 Hankel 变换(潘尔年等, 1986),即

$$\begin{cases} u(z, r) = \int_0^\infty U_L(z, \xi) J_0(\xi r) \xi d\xi, \\ v(z, r) = \int_0^\infty U_M(z, \xi) J_1(\xi r) \xi d\xi, \\ \phi(z, r) = \int_0^\infty \Phi(z, \xi) J_0(\xi r) \xi d\xi, \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $\xi$  表示波数.为了简便,仍用与球谐展开系数相同的符号表示变换后的系数.在此情形下,球函数趋近于柱函数,即

$$\begin{cases} P_n(\cos\theta) \rightarrow J_0\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right], \\ \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} \rightarrow -\left(n + \frac{1}{2}\right) J_1\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right], \end{cases} \quad (10)$$

并且

$$\begin{cases} \theta \rightarrow r/a, \\ \frac{n+1/2}{a} \rightarrow \xi, \\ dn \rightarrow a d\xi. \end{cases} \quad (11)$$

因此,(7)式的求和可以表示成如下的积分:

$$\begin{cases} u(r, \theta) = \frac{a}{m_e} \int_0^\infty h_n J_0\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right] dn, \\ v(r, \theta) = -\frac{a}{m_e} \int_0^\infty l_n \left(n + \frac{1}{2}\right) J_1\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right] dn, \\ \phi(r, \theta) = \frac{ag_a}{m_e} \int_0^\infty k_n J_0\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right] dn. \end{cases} \quad (12)$$

根据(11)式,(12)式变成

$$\begin{cases} u(r, \theta) = \frac{a}{m_e} \int_0^\infty h_n a J_0(\xi r) d\xi, \\ v(r, \theta) = -\frac{a}{m_e} \int_0^\infty l_n a^2 J_1(\xi r) \xi d\xi, \\ \phi(r, \theta) = \frac{ag_a}{m_e} \int_0^\infty k_n a J_0(\xi r) d\xi. \end{cases} \quad (13)$$

对于 Boussinesq 问题,一个点负荷作用下的解为(在 Hankel 变换域)

$$\begin{cases} U_L = -\frac{g_a(\lambda + 2\mu)}{4\pi\mu(\lambda + \mu)\xi}, \\ U_M = -\frac{g_a}{4\pi(\lambda + \mu)\xi}, \\ \Phi = \frac{3\rho_a g_a^2}{8\pi\langle\rho\rangle a\mu\xi^2}. \end{cases} \quad (14)$$

其中  $\rho_a$  表示地球模型最上层的密度,即地表密度,  $\langle\rho\rangle$  表示地球平均密度.将(14)式代入(9)式,并与(13)式进行比较,可得

$$\begin{cases} h_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = -\frac{g_a^2(\lambda + 2\mu)}{4\pi G \mu (\lambda + \mu)}, \\ l_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} nl_n = \frac{g_a^2}{4\pi G (\lambda + \mu)}, \\ k_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} nk_n = -\frac{g_a \rho a}{2\mu}. \end{cases} \quad (15)$$

在此过程中,要运用到(11)式中的  $n$  与  $\xi$  的近似关系  $n = a\xi$ ,因此其结果精度为  $O(1/n)$ .我们称(15)式的结果为一级渐近值,以区别于 Guo 等(2004)给出的更高一级的渐近值.

### 1.2 Okubo 和 Endo 方法

Okubo 和 Endo(1985)、Okubo(1988)推导负荷勒夫数渐近值的方法是基于 Love(1911)给出的均匀球变形的通解表达式,用  $\mathbf{X} = [U_L \ U_M \ \Phi \ T_L \ T_M \ Q]^T$  表示由 6 个变量表示的这个通解矢量,其中上标 T 表示转置,其解可表示为

$$\mathbf{X}(r) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(r) \\ \mathbf{E}(r) \end{bmatrix} \mathbf{J}(r) \mathbf{c}, \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{c}$  是由 6 个常数标量组成的待定系数矢量,且  $[\mathbf{D}(r)] =$

$$\frac{1}{r} \begin{bmatrix} nh^+ - f^+ z_n(k^+ r) & nh^- - f^- z_n(k^- r) & n \\ nh^+ + nz_n(k^+ r) & nh^- + nz_n(k^- r) & n \\ 3\gamma n f^+ r & 3\gamma n f^- r & n^2 \gamma r \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$[\mathbf{E}(r)] = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} E_2^+/n & E_2^-/n & 2\mu(n-1) \\ E_4^+ & E_4^- & 2\mu(n-1) \\ E_6^+ r & E_6^- r & 2n(n-1)\gamma r \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$[\mathbf{J}(r)] = \begin{bmatrix} j_n(k^+r) & 0 & 0 \\ 0 & j_n(k^-r) & 0 \\ 0 & 0 & r^n \end{bmatrix}, \quad (19)$$

式中

$$\begin{aligned} E_2^\pm &= -(\lambda + 2\mu)(k^\pm r)^2 f^\pm + 2\mu\{n(n-1)h^\pm \\ &\quad + [2f^\pm + n(n+1)]z_n(k^\pm r)\}, \\ E_4^\pm &= \mu[(k^\pm r)^2 + 2(n-1)h^\pm - 2(f^\pm + 1)z_n(k^\pm r)], \\ E_6^\pm &= 3\gamma[(2n+1)f^\pm - nh^\pm], \end{aligned} \quad (20)$$

$$(k^\pm)^2 = \frac{2\gamma}{\alpha^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + n(n+1) \frac{\alpha^2}{4\beta^2}}\right), \quad (21)$$

$$\gamma = \frac{4\pi G\rho}{3}; f^\pm = (k^\pm)^2 \frac{\beta^2}{\gamma}; h^\pm = f^\pm - n - 1, \quad (22)$$

$$z_n(x) = \frac{x j_{n+1}(x)}{j_n(x)}, \quad (23)$$

$\alpha$  和  $\beta$  分别为 P 波和 S 波速度,  $j_n(x)$  是球 Bessel 函数,  $n$  为球谐阶数. 利用边界条件(5)式可确定  $c$ , 从而求得地表的位移与附加引力位, 即

$$\mathbf{U}(a) = \mathbf{D}(a)[\mathbf{E}(a)]^{-1} \mathbf{T}(a). \quad (24)$$

由于高阶负荷勒夫数只与最上层的结构有关, 而如果采用密度为地表密度的均匀球, 则该均匀球表面的重力将不等于真实地球的地表重力. Okubo(1988)指出, 可用真实地球的地表重力值代替均匀球表面的重力, 这样得到的负荷勒夫数渐近值就是真实地球的结果. 因此地球模型的参数代入(24)式, 并将各量展开成  $n$  的级数后, 就可得到如(15)式所示的负荷勒夫数渐近值.

### 1.3 Guo 方法

郭俊义等(郭俊义, 2000; Guo et al., 2004)根据地表边界条件考察了每个变量与球谐阶数  $n$  的量级关系, 得到

$$\begin{cases} U_L \sim O(1), U_M \sim O(1/n), \Phi \sim O(1), \\ T_L \sim O(n), T_M \sim O(1), Q \sim O(n). \end{cases} \quad (25)$$

例如,  $T_L$  随着  $n$  的增大而增大, 与  $n$  呈线性关系, 而  $U_L$  不随  $n$  的增大而增大. 然后通过变量代换

$$\begin{cases} U_L = z_1, U_M = \frac{1}{n}z_3, \Phi = rz_5, \\ T_L = \frac{n}{r}z_2, T_M = \frac{1}{r}z_4, Q = nz_6. \end{cases} \quad (26)$$

使得所有的新变量  $z_i$  具有关于  $n$  相同的量级, 并在微分方程中忽略高阶小量, 从而得到

$$\begin{cases} \frac{r}{n} \frac{dz_1}{dr} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} z_3 + \frac{1}{\lambda + 2\mu} z_2, \\ \frac{r}{n} \frac{dz_3}{dr} = -z_1 + \frac{1}{\mu} z_4, \\ \frac{r}{n} \frac{dz_5}{dr} = z_6, \\ \frac{r}{n} \frac{dz_2}{dr} = z_4, \\ \frac{r}{n} \frac{dz_4}{dr} = \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} z_3 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} z_2, \\ \frac{r}{n} \frac{dz_6}{dr} = z_5. \end{cases} \quad (27)$$

该微分方程组存在解析解, 可以求出负荷勒夫数  $h$  和  $l$  的渐近值. 但是  $k$  的渐近值无法求出, 原因是舍去的项太多了. 因此他们继续保留高一阶小量, 并求解一个非齐次的微分方程组, 从而求出了  $k$  的渐近值.

在此过程中, Guo 等(2004)未介绍如何求得(27)式的解析解, 而是直接给出了结果. 因为该方程组实际上是变系数的, 尽管将  $n/r$  移到了方程组的左边. 所以其是否存在解析解, 并不是那么直观地能够看出来. 实际上, 因为(27)式是欧拉型, 所以通过变量代换,

$$r = e^\xi, \quad (28)$$

可将该方程组化成常系数的微分方程组, 从而有解析解. Guo 等(2004)以一级渐近值为基础, 求解关于高一级小量的非齐次微分方程组, 给出了更高一级的渐近值. 但是对于负荷问题, 更高一级的渐近值在计算负荷格林函数时是没有必要的, 因为利用(15)式的渐近值已经能够很高效地获得收敛的格林函数(参考下文的图 2).

## 2 解析解方法

本文介绍的推导负荷勒夫数渐近值的新方法是以 Pan 等(2015)提出的解析法和 DVP 传播矩阵方法为基础. 其中解析法的思想是使得地球变形的通解具有解析的形式, 而 DVP 传播矩阵法是建立高阶地表负荷勒夫数与地表边界条件之间的直接联系. 下面首先简单介绍解析法和 DVP 传播矩阵法, 具体内容可参考(Pan et al., 2015), 然后给出推导负荷勒夫数渐近值的过程.

### 2.1 解析解构造

Pan 等(2015)提出了求解(1)式的解析法. 对于

一个分层地球模型, (1)式是没有解析解的, 但是通过合理的假设可以构造出近似的解析解。首先, 在地核中假设每层密度是常数, 重力是  $r$  的线性函数; 在地幔和地壳中, 重力是常数, 密度是  $r$  的反函数, 如在第  $j$  层中, 重力和密度满足

$$g_j(r) = \begin{cases} b_j r, & r_{j-1} \leq r \leq r_j \leq r_c \\ c_j^g, & r_c < r_{j-1} \leq r \leq r_j \leq a \end{cases} \quad (29)$$

和

$$\rho_j(r) = \begin{cases} c_j^p, & r_{j-1} \leq r \leq r_j \leq r_c \\ \frac{\rho_{0j}r_{0j}}{r}, & r_c < r_{j-1} \leq r \leq r_j \leq a \end{cases} \quad (30)$$

其中,  $b$  和  $c$  是常数,  $r_{j-1}$  表示第  $j$  层的下边界,  $r_j$  表示第  $j$  层的上边界,  $r_c$  表示核幔边界的半径,  $\rho_{0j}$  是第  $j$  层的平均密度,  $r_{0j}$  是使该层质量守恒的等效半径, 它满足

$$\begin{aligned} \frac{dU_L}{d\xi} &= -\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}U_L + \frac{n(n+1)\lambda}{\lambda+2\mu}U_M + \frac{1}{\lambda+2\mu}(rT_L), \\ \frac{dU_M}{d\xi} &= -U_L + U_M + \frac{1}{\mu}(rT_M), \\ \frac{d\Phi}{d\xi} &= -4\pi G\rho_{0j}r_{0j}U_L - (n+1)\Phi + rQ, \\ \frac{d(rT_L)}{d\xi} &= \left[ \frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} - 4\rho_{0j}r_{0j}c_j^g \right]U_L + n(n+1)\left[ \rho_{0j}r_{0j}c_j^g - \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \right]U_M \\ &\quad - (n+1)\rho_{0j}r_{0j}\Phi + \left( 1 - \frac{4\mu}{\lambda+2\mu} \right)(rT_L) + n(n+1)(rT_M) + \rho_{0j}r_{0j}(rQ), \\ \frac{d(rT_M)}{d\xi} &= \left[ \rho_{0j}r_{0j}c_j^g - \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \right]U_L + 2\mu\left[ \frac{2n(n+1)(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} - 1 \right]U_M \\ &\quad + \rho_{0j}r_{0j}\Phi - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(rT_L) - 2(rT_M), \\ \frac{d(rQ)}{d\xi} &= -4\pi G(n+1)\rho_{0j}r_{0j}U_L + 4\pi Gn(n+1)\rho_{0j}r_{0j}U_M + n(rQ). \end{aligned} \quad (33)$$

如果再假设第  $j$  层内的弹性模量为常数(目前的研究基本都是这么做的), 那么可以看出上述微分方程组的系数都是常数, 这样就存在解析解。为简便计, 把(33)式表示成矢量和矩阵的形式, 即

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\xi} = \mathbf{A}\mathbf{Y}, \quad (34)$$

其中,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ r\mathbf{T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_L \\ nU_M \\ n\Phi \end{pmatrix}, \quad r\mathbf{T} = \begin{pmatrix} rT_L/n \\ rT_M \\ rQ \end{pmatrix}. \quad (35)$$

$$r_{0j} = \frac{2(r_j^3 - r_{j-1}^3)}{3(r_j^2 - r_{j-1}^2)}. \quad (31)$$

以上的假设是否合理, 一方面可以考察假设后的模型与原模型的近似程度, 另一方面取决于计算结果是否准确。Pan 等(2015)的数值结果已经证明了结果的可靠性以及假设的合理性, 实际上上述假设正是基于 PREM 模型的参数分布特征作出的, 假设后的模型与原模型的符合程度是非常高的, 差异仅为 0.6%。并且这种方法也成功运用到求解位错以及地表热负荷引起的变形问题中, 也被证明是非常高效的(Zhou et al., 2019a,b, 2020, 2021a,b)。

此外, 作一个变量代换

$$\xi = \ln\left(\frac{r}{r_{j-1}}\right), \quad (32)$$

显然, 对于  $j$  层的下边界有  $\xi=0$ 。再以  $rT_L$ ,  $rT_M$  和  $rQ$  为新变量, 则(1)式变为

为了方便, 我们用球谐阶数  $n$  对变量作了规范化处理使各个变量量级相当。相应的矩阵  $\mathbf{A}$  可从(33)式导出(系数作相应的调整, 乘上与  $n$  有关的系数)。此时, 通解可以表示成(如在地球模型的第  $j$  层)

$$\mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \langle s_1 \xi \rangle & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \langle s_2 \xi \rangle \end{bmatrix}_j \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix}_j, \quad (36)$$

(36)式右边第一个矩阵是系数矩阵  $\mathbf{A}$  的特征向量组成的矩阵, 下标  $j$  表示它由第  $j$  层的参数计算获得, 第二个矩阵中的  $s_1$  和  $s_2$  分别是由具有正实部(上标+)和负实部(上标-)的三个特征值组成, 即

$$\langle s_1 \xi \rangle = \begin{bmatrix} e^{k_1^+ \xi} & & \\ & e^{k_2^+ \xi} & \\ & & e^{k_3^+ \xi} \end{bmatrix}, \quad \langle s_2 \xi \rangle = \begin{bmatrix} e^{k_1^- \xi} & & \\ & e^{k_2^- \xi} & \\ & & e^{k_3^- \xi} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

从而,由传播矩阵法建立第  $j$  层上下边界处( $\xi = \xi_j$  和  $\xi = 0$ )的两组解之间的关系:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}^u \\ r\mathbf{T}^u \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \langle s_1 \xi_j \rangle \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \langle s_2 \xi_j \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}_j^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^l \\ r\mathbf{T}^l \end{bmatrix}_j, \quad (38)$$

其中上标  $u$  和  $l$  分别表示第  $j$  层的上下边界,上标  $-1$  表示矩阵求逆. 然而, Pan 等(2015)的数值结果表明,由于数值溢出,普通的传播矩阵方法,即(38)式,无法正确算出高阶(如  $n > 6000$ )结果. 下面要介绍的 DVP 传播矩阵法可以很好地解决这个问题.

## 2.2 DVP 传播矩阵法

该方法的核心思想是避免导致溢出的大数产生,其技巧仅在于对普通的传播矩阵法进行小的改动,即

1) 将(36)式改写为

$$\mathbf{P}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \langle s_2 \xi_j \rangle \\ \mathbf{B}_1 \langle -s_1 \xi_j \rangle & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \langle -s_1 \xi_j \rangle & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \langle s_2 \xi_j \rangle \end{bmatrix}_j^{-1}. \quad (41)$$

需要指出的是,这种传播矩阵方法的特别之处在于变量的位置关系与传统的传播矩阵方法是不一样的(对比(38)与(40)两式). 从(41)式可以看出,在传播矩阵的计算中不涉及大的正数的指数,从而避免大数的产生,解决了溢出的问题.

## 2.3 渐近值推导

基于上面的方法原理,我们就可以推导出负荷勒夫数的渐近值. 特别地,当球谐阶数  $n$  很大时,由于特征值接近于  $\pm n$ ,所以(41)式中的  $\langle -s_1 \xi_j \rangle$  和  $\langle s_2 \xi_j \rangle$  都接近于  $\mathbf{0}$ ,当  $n$  为无穷大时,它们就等于  $0$ . 因此(41)式变成

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

由(40)式进一步得到

$$\mathbf{U}^u = [\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1}] r\mathbf{T}^u, \quad r\mathbf{T}^l = [\mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2^{-1}] \mathbf{U}^l. \quad (43)$$

这说明,当球谐阶数很大时,  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{T}$  是相关的,这种相关性会导致传统的龙格-库塔数值积分法无法准确计算出非常高阶的负荷勒夫数;然而这种相关性可以使我们能够直接求得表面的负荷勒夫数渐近值. 对于地球的最外层(设为第  $p$  层),我们可由(43)式直接得出

$$\mathbf{U}(r = a) = [\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1}]_p r\mathbf{T}(r = a), \quad (44)$$

$$\mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \langle s_1 (\xi - \xi_j) \rangle & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \langle s_2 \xi \rangle \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

由于  $\xi_j$  是常数,所以最终只是改变了待定系数,从(36)式中的  $\mathbf{c}_1$  变成(39)式的  $\mathbf{c}_3$ ,并不会改变最终的解.

2) 在第  $j$  层中,由上下边界的解我们可以得到与(38)式不一样的关系:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}^u \\ r\mathbf{T}^u \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \mathbf{U}^l \\ r\mathbf{T}^l \end{bmatrix}_j, \quad (40)$$

其中,

$$\mathbf{P}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \langle s_2 \xi_j \rangle \\ \mathbf{B}_1 \langle -s_1 \xi_j \rangle & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \langle -s_1 \xi_j \rangle & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \langle s_2 \xi_j \rangle \end{bmatrix}_j^{-1}. \quad (41)$$

其中,方括号的下标  $p$  表示方括号内的矩阵由第  $p$  层的参数求得. 这说明,只要我们知道最外层的系数矩阵  $\mathbf{A}$  的特征向量,就可以得到当  $n$  趋于无穷大时的  $\mathbf{U}$ ,从而得到负荷勒夫数的渐近值.

通常情况下,矩阵  $\mathbf{A}$  的特征向量是无法解析地表达出来的. 但是我们知道,对于地表质量负荷问题,在计算高阶的负荷勒夫数时,地球的自引力效应是可以忽略的,球谐阶数越高,自引力效应的影响越不明显(见下文图 1). 实际上 Farrell(1972)从 Boussinesq 近似得到的渐近值也是忽略了自引力影响的.

对于忽略自引力的情形,在(33)式关于应力的微分方程中就可以舍去与密度或重力有关的项,从而位移和应力是与附加引力位无关的,因此可以首先解出(如 Wason and Singh, 1972; Fang et al., 2014),然而附加引力位是与位移相关的,所以继续求附加引力位时需要求解一个非齐次的微分方程组,这也是 1.3 节中 Guo 等(2004)求负荷勒夫数  $k$  的渐近值采用的方法,但这反而增加了难度. 实际上,我们可以直接运用 2.1 节的方法,此时矩阵  $\mathbf{A}$  的特征向量可以很容易地求出(如通过 MATLAB 的符号运算,具体表达式可参考 Zhou et al., 2021a).

因此根据矩阵  $\mathbf{A}$  的特征向量,以及(5)式和(44)式可以很容易求得

$$\begin{cases} U_L = -\frac{g_a(2n+1)[2(\lambda+2\mu)n^2 + \lambda n - 2\mu]}{8\pi G\mu(n-1)[2(\lambda+\mu)n^2 + 2(2\lambda+\mu)n + (3\lambda+2\mu)]}, \\ U_M = -\frac{g_a(2n+1)[-2\mu n + (3\lambda+4\mu)]}{8\pi G\mu(n-1)[2(\lambda+\mu)n^2 + 2(2\lambda+\mu)n + (3\lambda+2\mu)]}, \\ \Phi = -1 + \frac{g_a \rho_{0p} r_{0p} [4(\lambda+\mu)n^2 + (5\lambda+3\mu)n - \mu]}{4\mu(n-1)[2(\lambda+\mu)n^2 + 2(2\lambda+\mu)n + (3\lambda+2\mu)]}. \end{cases} \quad (45)$$

(45)式是高阶负荷勒夫数的严格解析表达式,给出了负荷勒夫数与球谐阶数  $n$  的关系. 特别地,当  $n$  趋于无穷大时,取极限就得到

$$\begin{aligned} h_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = -\frac{g_a^2(\lambda+2\mu)}{4\pi G\mu(\lambda+\mu)}, \\ l_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} nl_n = \frac{g_a^2}{4\pi G(\lambda+\mu)}, \\ k_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} nk_n = -\frac{g_a \rho_{0p} r_{0p}}{2\mu}. \end{aligned} \quad (46)$$

由于我们是求负荷勒夫数在  $n$  趋于无穷大时的渐近值,我们可以将第  $p$  层设得足够薄,因此有

$$\rho_{0p} r_{0p} = \rho_a a, \quad (47)$$

即地表密度与地球半径的乘积. 这样就可以得到与(15)式完全一致的结果. 实际上对于最外层来说,地球模型通常是均匀的,因此  $\rho_{0p}$  就是这个平均值,而由(31)式计算得到的  $r_{0p}$  实际已经非常接近地球半径  $a$  了(对于 PREM 模型来说,误差小于万分之三),就算直接使用  $r_{0p}$  也可以确保  $k_\infty$  的准确性.

## 2.4 数值结果

图 1 给出了根据(45)式确定的负荷勒夫数随球谐阶数的变化,并与 Guo 等(2004)考虑高一阶小量的渐近值进行了比较. 其中地球模型采用 PREM (Dziewonski and Anderson, 1981),其最外层的海洋层替换为固体层,其参数设置如下:  $\lambda = 3.43 \times 10^{10}$  Pa,  $\mu = 2.66 \times 10^{10}$  Pa,  $\rho = 2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . 从图中可以看出,随着球谐阶数  $n$  的增大,负荷勒夫数趋近于一个常数. 由于我们推导高阶负荷勒夫数解析公式时未考虑自引力的影响,因此所得结果在高阶部分与不考虑自引力的数值结果比较接近,在  $n=5000$  左右时二者就已经比较一致;但是在低阶部分与考虑自引力的数值结果仍然存在很大的差异. 通常计算负荷格林函数时只要考虑 10000 阶以下的负荷勒夫数,因此在研究负荷形变时自引力的影响一般是需要加以考虑的. 但是从图中可以看出,随着  $n$  的增大,自引力的影响越来越小,因此在研究负荷勒夫数渐近特征时,自引力是可以忽略的,这可从图 1 中不同结果在  $n$  很大时具有一致性得到验证.

此外,我们也将本文给出的渐近值与 Guo 等(2004)的结果进行了比较. 结果说明,在  $n < 20000$

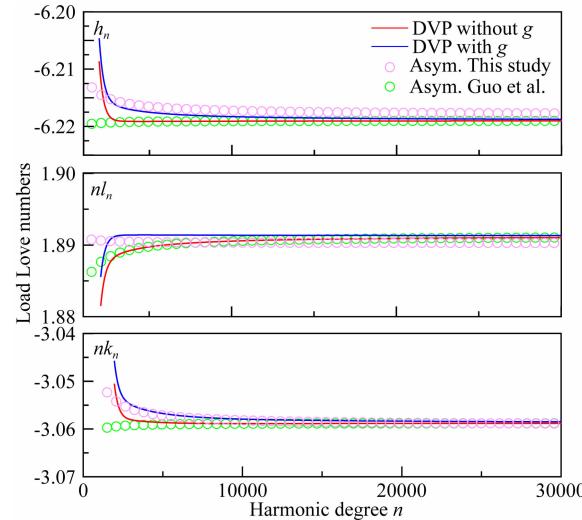


图 1 负荷勒夫数随球谐阶数的变化  
红色和蓝色曲线分别代表考虑和不考虑自引力效应的数值计算结果;粉色圆圈代表(45)式给出的解析解;绿色圆圈代表 Guo 等(2004)的渐近值结果.

Fig. 1 Variation of load Love numbers with respect to harmonic degree

Red and blue lines represent numerical results with and without self-gravitation effect, respectively; pink and green circles asymptotic results via Eq. (45) and Guo et al. (2004), respectively.

左右时,Guo 等(2004)的渐近值与考虑自引力的数值结果更加接近,这是因为他们推导渐近值时部分地考虑了自引力的影响;但是对于  $n > 20000$  的部分,我们的结果不管是和考虑自引力还是和不考虑自引力的数值结果都更加接近,对于位移的勒夫数,这种情况更加明显.

为了显示渐近值在计算格林函数中的作用,作为例子,我们根据(8)式计算了垂直位移、水平位移和附加引力位的格林函数随角距离  $\theta$  的变化关系,结果如图 2 所示. 为了更好的显示结果,格林函数值都乘上了一个规范化系数  $10^{12} a\theta$ . 首先,通过对比采用不同渐近值获得的格林函数,发现渐近值之间的微小差异不会影响格林函数的计算. 并且我们发现负荷勒夫数渐近值在附加引力位的计算中并不是必需的,不采用 Kummer 变换同样可以获得收敛的格林函数. 图 2 也说明了如果不采用 Kummer 变换,即使截断阶数  $N=50000$ ,位移格林函数仍然是不

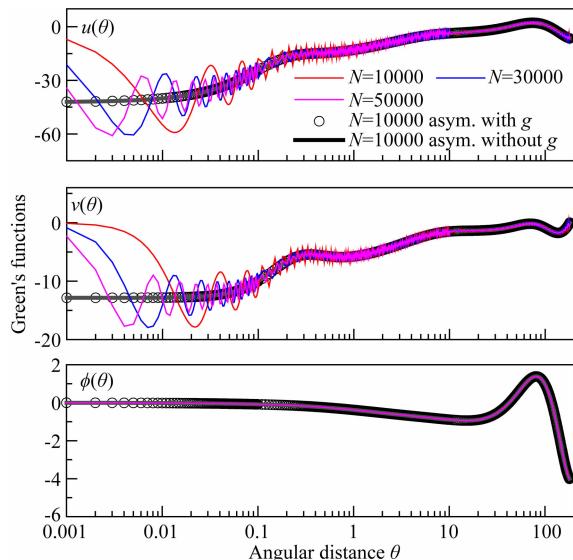


图 2 负荷格林函数随角距离的变化(规范化系数为  $10^{12} a\theta$ )  
“asy. with  $g$ ”表示采用考虑自引力的 50000 阶数值结果作为渐近值,“asy. without  $g$ ”表示采用不考虑自引力的 50000 阶数值结果作为渐近值。

Fig. 2 Green's functions of angular distance for surface mass loading (the results are normalized by a factor of  $10^{12} a\theta$ ) “asy. with  $g$ ” and “asy. without  $g$ ” denote respectively that the load Love numbers for 50000 degree with and without self-gravitation are used as the asymptotic values.

收敛的,说明渐近值对于位移格林函数的计算来说是必不可少的,这从另一个侧面证明了渐近值的重要性。

### 3 讨论

从 2.3 节的推导我们可以看出,负荷勒夫数的渐近值只和地球模型地表的参数有关,而不论地球内部的结构如何。其实,这一点早就为我们所熟知,即高阶的负荷勒夫数与地壳和上地幔介质密切相关,因此采用龙格-库塔方法计算高阶负荷勒夫数时可以直接从地幔开始积分。然而,通过我们的推导可以从本质上了解其原因:地球每个分层内的  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{T}$  之间的相关性随着球谐阶数的增大而增加,从而地表的负荷勒夫数可由地表的边界条件直接确定。

相比于 Okubo 和 Endo 方法,我们给出的新方法不需要作均匀球的假设(或基于均匀球模型开展相关推导),不需要用真实地球的地表重力代替均匀球表面的重力。目前基于均匀球的地球受力变形的数值模拟必须要替换地表重力才能得到正确的结果,如 Sun(2004)对位错引起的地表位移场变化的模拟。与 Guo 等(2004)的方法一样,我们的方法实

际上也只需要考虑地球模型的最外层即可。

从 Guo 等(2004)给出的负荷勒夫数渐近值的更高阶的结果可以看出,在位移( $h$  和  $l$ )结果中耦合进了重力的影响。但是将(44)式展开成  $n$  的罗朗级数后高阶解中没有重力项,原因在于我们忽略了自引力的影响。对于地表负荷问题,忽略自引力不会影响负荷勒夫数渐近值的一级结果,即  $O(1)$  量级的常数项,但是会影响高一级的结果,但是这种影响随着球谐阶数的增大越来越弱,并且高一级的结果在格林函数的计算中是不必要的。在 2.3 节中我们忽略自引力的目的是为了获得矩阵  $\mathbf{A}$  的特征向量的解析形式,从而获得渐近值的解析形式,这样就可以运用 Kummer 变换。Kummer 变换的关键有两点:一方面,渐近值必须与实际的勒夫数比较接近,从而它们的差是一个高阶小量,并且这个差异随着球谐阶数的增大而减小,这样(8)式右端的第一个级数求和能够很快地收敛;另一方面,渐近值需要具有严格解析式,从而(8)式右端的第二个级数求和有简单的解析式,能够用简单的函数表示。Chen 等(2018)采用的刚度矩阵法或者 2.2 节介绍的 DVP 都能够计算任意球谐阶数的负荷勒夫数,但是要获得收敛的负荷格林函数,具有解析表达式的渐近值对于简化负荷格林函数的计算仍是非常必要的,因为截断到很高的球谐阶数是很费时低效的。采用拟合的方法确定当  $n$  非常大时的勒夫数随  $n$  变化的解析式(即渐近值)也是一个非常有效的方法(如 Pan et al., 2015; Zhou et al., 2019b)。

本文的方法除了采用 Pan 等(2015)的解析解方法获得常微分方程组的系数矩阵  $\mathbf{A}$  的特征向量解析表达式外,另一个关键之处是采用了 DVP 传播矩阵方法,(42)式显示了其独特的性质,阶数  $n$  越大,其计算方面的优越性越明显。DVP 方法只是在传统的传播矩阵方法基础上作了小的改动,变换变量的位置,就解决了数值溢出的问题,并且计算也非常的高效。

最后需要强调的是,从表面上看,本文的方法涉及构造解析解的理论方法和 DVP 传播矩阵方法。实际上推导负荷勒夫数的过程非常简单,可以分成以下两个步骤:首先计算常微分方程组的系数矩阵  $\mathbf{A}$  的特征向量从而得到(44)式右端方括号中的矩阵;然后根据地表边界条件由(44)式通过矩阵运算直接得到需要的渐近值的解析表达式。该过程只涉及矩阵特征向量的计算及相关的矩阵运算,原理简单,也非常容易编程实现(Pan, 2019; Zhou et al.,

2019a).

## 4 结论

本文基于求解地球变形的解析解方法和DVP传播矩阵方法,导出了高阶负荷勒夫数的解析表达式,进而确定了负荷勒夫数的渐近值。渐近值的推导只与地球模型的最外层有关,推导过程只涉及矩阵特征向量计算和简单的矩阵运算。本文所得结果与已有方法给出的结果是一致的,并且更加准确地描述了负荷勒夫数的渐近特征。

利用DVP传播矩阵法对于 $n$ 非常大时所具备的特点,我们不但可以看出变量 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{T}$ 的关联性,这也是导致传统的龙格-库塔数值积分法失效的本质原因,还可以直接根据地表边界条件求出负荷勒夫数的渐近值。这说明DVP传播矩阵法在数值计算方面有其独特的优势,可以广泛应用于分层地球模型的变形研究中,如负荷形变、地震形变等静态变形问题,以及地球简正模或合成地震图等动态变形问题中。

**致谢** 本文第二作者于1982年至1984年在北京大学地质系师承王仁教授攻读硕士学位,学位论文题目为《成层地球模型对体势力及表载的响应》。该论文利用球谐函数与传播矩阵方法研究分层球形地球在日月引潮力和地表负载作用下的位移场和应力场变化,并采用数值积分方法计算勒夫数。在王仁教授的教诲下,科研能力得到了很大的提升,为后来从事力学和数学相关的研究奠定了坚实的基础,对现在的工作仍有很大的帮助。

## References

- Chen J Y, Pan E, Bevis M. 2018. Accurate computation of the elastic load Love numbers to high spectral degree for a finely layered, transversely isotropic and self-gravitating Earth. *Geophys. J. Int.*, 212(2): 827-838.
- Dziewonski A M, Anderson D L. 1981. Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 25: 297-356.
- Fang M, Dong D N, Hager B H. 2014. Displacements due to surface temperature variation on a uniform elastic sphere with its centre of mass stationary. *Geophys. J. Int.*, 196(1): 194-203.
- Farrell W E. 1972. Deformation of the Earth by surface loads. *Rev. Geophys. Phys.*, 10(3): 761-797.
- Goad CC. 1980. Gravimetric tidal loading computed from integrated Green's function. *J. Geophys. Res.*, 85(B5): 2679-2683.
- Guo J Y. 2000. Direct proof of the asymptotic expression of the loading Love numbers. *Chin. J. Geophys.* (in Chinese), 43(4): 515-521.
- Guo J Y, Li Y B, Huang Y, et al. 2004. Green's function of the deformation of the Earth as a result of atmospheric loading. *Geophys. J. Int.*, 159(1): 53-68.
- Hsu H Z, Chen Z B, Yang H B. 1982. The effect of oceanic tides on the gravity tidal observations. *Chinese J. Geophys.* (Acta Geophys. Sin.) (in Chinese), 25(2): 120-129.
- Longman I M. 1962. A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads, 1. Theory. *J. Geophys. Res.*, 67(2): 845-850.
- Longman I M. 1963. A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads: 2. Computations and numerical results. *J. Geophys. Res.*, 68(2): 485-496.
- Love A E H. 1911. Some Problems of Geodynamics. London: Cambridge University Press.
- Merriam J B. 1992. Atmospheric pressure and gravity. *Geophys. J. Int.*, 109(2): 488-500.
- Okubo S, Endo T. 1985. Asymptotic formulas of the static Love numbers. *Manuscripta Geodaet.*, 10: 59-65.
- Okubo S. 1988. Asymptotic solutions to the static deformation of the Earth-I. Spheroidal mode. *Geophys. J. Int.*, 92(1): 39-51.
- Okubo S. 1993. Reciprocity theorem to compute the static deformation due to a point dislocation buried in a spherically symmetric Earth. *Geophys. J. Int.*, 115(3): 921-928.
- Pan E, Chen J Y, Bevis M, et al. 2015. An analytical solution for the elastic response to surface loads imposed on a layered, transversely isotropic and self-gravitating Earth. *Geophys. J. Int.*, 203(3): 2150-2181.
- Pan E N, Ding Z Y. 1986. Reciprocity theorem and some relations between Love numbers and surface loading coefficients. *Chinese J. Geophys.* (Acta Geophys. Sin.) (in Chinese), 29(1): 54-60.
- Pan E N, Ding Z Y, Wang R. 1986. The response of a spherically stratified earth model to potential body forces and surface loads. *Acta Sci. Nat. Univ. Pekin.* (in Chinese), 22(4): 66-80.
- Pan E N. 2019. Green's functions for geophysics: a review. *Rep. Prog. Phys.*, 82(10): 106801, doi: 10.1088/1361-6633/ab1877.
- Sun H P, Luo S C. 1998. Theoretical computation and detection of the atmospheric gravity signal. *Chinese J. Geophys.* (Acta Geophys. Sin.) (in Chinese), 41(5): 634-641.
- Sun W K. 2004. Asymptotic solution of static displacements caused by dislocations in a spherically symmetric Earth. *J. Geophys. Res.*, 109(B5): B05402, doi: 10.1029/2003JB002793.
- Sun W K, Okubo S. 1993. Surface potential and gravity changes due to internal dislocations in a spherical Earth, 1. Theory for a point dislocation. *Geophys. J. Int.*, 114: 569-592.
- Sun W K, Sjöberg L E. 1999. Gravitational potential changes of a spherically symmetric Earth model caused by a surface load. *Geophys. J. Int.*, 137: 449-468.

- Van Dam T M, Blewitt G, Heflin M B. 1994. Atmospheric pressure loading effects on Global Positioning System coordinate determinations. *J. Geophys. Res.*, 99(B12): 23939-23950.
- Wang H S, Hsu H Z, Li G Y. 1996. Improvement of computations of load Love numbers of SNREI Earth model. *Chinese J. Geophys. (Acta Geophys. Sin.)* (in Chinese), 39(S1): 182-189.
- Wason H R, Singh S J. 1972. Static deformation of a multilayered sphere by internal sources. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 27(1): 1-14.
- Zhou J C, Pan E N, Bevis M. 2019a. A point dislocation in a layered, transversely isotropic and self-gravitating Earth. Part I: analytical dislocation Love numbers. *Geophys. J. Int.*, 217(3): 1681-1705.
- Zhou J C, Pan E N, Bevis M. 2019b. A point dislocation in a layered, transversely isotropic and self-gravitating Earth-Part II: Accurate Green's functions. *Geophys. J. Int.*, 219(3): 1717-1728.
- Zhou J C, Pan E N, Bevis M. 2020. A point dislocation in a layered, transversely isotropic and self-gravitating Earth-Part III: internal deformation. *Geophys. J. Int.*, 223(1): 420-443.
- Zhou J C, Pan E N, Bevis M. 2021a. A point dislocation in a layered, transversely isotropic and self-gravitating Earth. Part IV: Exact asymptotic solutions of dislocation Love numbers for the special case of isotropy. *Geophys. J. Int.*, 225(1): 664-683.
- Zhou J C, Pan E N, Bevis M. 2021b. Deformation due to surface temperature variation on a spherically layered, transversely isotropic and self-gravitating Earth. *Geophys. J. Int.*, 225(3): 1672-1688.
- Zhou J C, Sun H P, Xu J Q. 2009. Validating global hydrological models by ground and space gravimetry. *Chinese Science Bulletin*, 54(9): 1534-1542.

## 附中文参考文献

- 郭俊义. 2000. 负荷勒夫数渐近表达式的直接证明. 地球物理学报, 43(4): 515-521.
- 潘尔年, 丁中一. 1986. 互换定理及 Love 数与表载系数的关系. 地球物理学报, 29(1): 54-60.
- 潘尔年, 丁中一, 王仁. 1986. 成层地球模型对体势力及表载的响应. 北京大学学报(自然科学版), 22(4): 66-80.
- 汪汉胜, 许厚泽, 李国营. 1996. SNREI 地球模型负荷勒夫数数值计算的新进展. 地球物理学报, 39(S1): 182-189.
- 许厚泽, 陈振邦, 杨怀冰. 1982. 海洋潮汐对重力潮汐观测的影响. 地球物理学报, 25(2): 120-129.

(本文编辑 何燕)